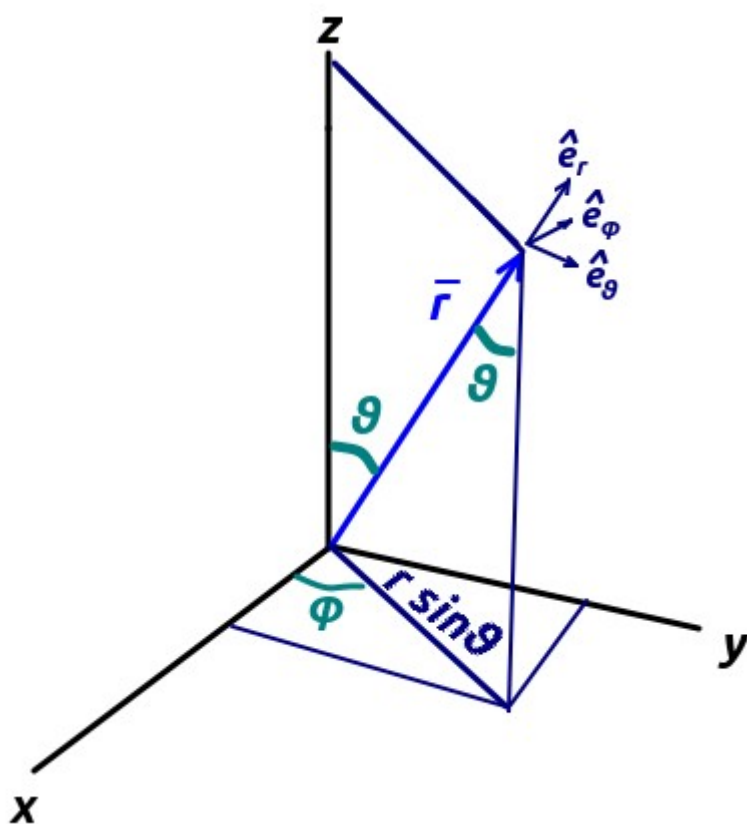


Wersory sferycznego układu współrzędnych w ich zależności od położenia



Dowolne położenie \vec{r} w sferycznym układzie współrzędnych opisywane jest przez trójkę liczb: (r, ϑ, φ) , gdzie r stanowi długość wektora \vec{r} , ϑ jest miarą kąta jego odchylenia od osi z , zaś φ pokazuje oddalenie rzutu (cienia) wektora \vec{r} na płaszczyźnie XOY od osi x . Wersory $\hat{e}_r, \hat{e}_\vartheta, \hat{e}_\varphi$ dają nam porządną, prawoskrętną bazę ortonormalną, jednak ich wspólna orientacja w przestrzeni zależy ściśle od położenia (od lokalnych wartości r , ϑ oraz φ).

Jest to jeden z fundamentalnych układów współrzędnych, w jakim przychodzi nam zawsze pracować w

przypadku choćby przybliżonej symetrii sferycznej (biegunowej) zagadnienia (np. siły centralne – ruch orbitalny planet i ich energie potencjalne, zagadnienie siły: odródkowej i Coriolisa, ruch ładunku w polu elektromagnetycznym, precesja bąka, rozkład prawdopodobieństwa lokalizacji elektronu wokół jądra – żeby wymienić te najoczywistsze).

Jedyną bazą, która nie zmienia swojej orientacji w zależności od położenia na torze ciała (i dlatego jest tak niewygodna i wygodna zarazem) jest baza kartezjańskiego prostokątnego układu współrzędnych xyz . Występuje zatem oczywista potrzeba rozpisania wersorów układu sferycznego w bazie kartezjańskiej – tak, aby było wiadomo, jaka jest ich zmienność czasowa, a zatem jak je różniczkować dla otrzymania prędkości, przyspieszenia, etc.

Przeliczenie to nie nastęrcza trudności i wynika z elementarnej geometrii na rysunku:

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \theta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \theta . \end{aligned}$$

Dalej należy zauważyć, że wektor $\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}$, intensywność zmiany wektora położenia po współrzędnej r , jest skierowany siłą rzeczy wzdłuż kierunku \hat{r} . Wystarczy zatem podzielić go przez jego normę (oznaczaną H_r), a otrzymamy wersor \hat{e}_r – jednostkowej długości wektor w kierunku \hat{r} . Tak samo, $\frac{1}{H_\theta} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta}$ oraz $\frac{1}{H_\varphi} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}$ będą tożsame, odpowiednio, z \hat{e}_θ oraz \hat{e}_φ .

$$\hat{e}_r = \frac{1}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right|} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} = \frac{1}{H_r} (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) .$$

Błyskawicznie sprawdzamy, że $H_r = (\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + \cos^2 \theta)^{1/2} = 1$, co było do przewidzenia.

Wyliczamy pozostałe wersory bazy,

$$\begin{aligned} \hat{e}_\theta &= \frac{1}{H_\theta} (r \cos \theta \cos \varphi, r \cos \theta \sin \varphi, -r \sin \theta) = \left\{ \begin{array}{l} \text{widać, że} \\ H_\theta = r \end{array} \right\} = \\ &= (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_\varphi &= \frac{1}{H_\varphi} (-r \sin \theta \sin \varphi, r \sin \theta \cos \varphi, 0) = \left\{ \begin{array}{l} \text{widać, że} \\ H_\varphi = r \sin \theta \end{array} \right\} = \\ &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0) . \end{aligned}$$

Tak właśnie, w zależności od lokalnych wartości ϑ, φ , przedstawiają się wersory bazy sferycznej. Brak zależności od r , jak pokazały wzory, odpowiada faktowi, że skracanie i wydłużanie \vec{r} nie wprowadza żadnej zmiany do orientacji wersorów $\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi$. Znając zależność pozostałych dwóch zmiennych od czasu, możemy również zróżniczkować wszystkie trzy wersory po czasie. Licząc szybkość zmian danej wielkości, należy uwzględnić także zmienność bazy w czasie, np.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dp_i}{dt} \hat{e}_i + p_i \frac{d\hat{e}_i}{dt} \quad (\text{opuszczono tradycyjnie znak sumy}).$$

Baza $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$ jest prostokątna i prawoskrętna. Np. $\hat{e}_\theta \times \hat{e}_\varphi = \hat{e}_r$, co będzie łatwym ćwiczeniem rachunkowym dla Czytelnika.

Kiedy ruch jest płaski, możemy sprowadzić go jedynie do (odpowiednio ustawionej) płaszczyzny XOY , a zatem położyć $\theta = \frac{\pi}{2}$. Wtedy $\sin \theta = 1$, $\cos \theta = 0$ i nasz układ nazywa się *biegunowym* i przybiera postać:

$$\begin{aligned}\hat{e}_r &= (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \\ \hat{e}_\theta &\text{ jest stałe i wynosi } (0, 0, -1) \text{ – przy czym wektory nie mają składowej } \theta, \\ \hat{e}_\varphi &= (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0).\end{aligned}$$

Układ ten jest identyczny z układem walcowym, gdy położymy $z = 0$. Wersory bazy mają teraz bardzo prostą zmienność czasową (proszę porównać z moim artykułem *Prędkość i przyspieszenie w układzie walcowym i sferycznym*):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \hat{e}_r &= \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi \equiv \dot{\varphi} \hat{\varphi}, \\ \frac{d}{dt} \hat{e}_\varphi &= -\dot{\varphi} \hat{e}_r \equiv -\dot{\varphi} \hat{r}.\end{aligned}$$

Stąd wyprowadza się z łatwością wzory na prędkość $\vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\varphi} \hat{\varphi}$ i przyspieszenie $\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \hat{r} + (2\dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) \hat{\varphi}$ w układzie biegunowym, a dwa ze składników przyspieszenia identyfikujemy jako pochodzące od siły dośrodkowej i Coriolisa.

Autor: Marek Pietrachowicz.